**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

**ОТЧЕТ**

**по лабораторной работе №1**

**по теме: “Методы безусловной минимизации функций”**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 8383 |  | Киреев К.А. |
| Преподаватель |  | Мальцева Н.В. |

Санкт-Петербург

2021

**Цель работы.**

1. Решение задачи безусловной минимизации функций с помощью стандартной программы.

2. Исследование и объяснение полученных результатов.

**Задание (вариант 37).**

Минимизировать функцию F (x1, x2, a) = (x2 - x12)2 + a (x1 - 1)2 с точностью до 10-5 (abs (F (x1k, x2k, a) - F (x1\*, x2\*, a)) <10-5) градиентными методами - методом с убыванием длины шага и методом наискорейшего спуска. Оценить скорость и порядок сходимости обоих методов. Провести сравнительный анализ эффективности методов в зависимости от начальной точки и параметра а>0.

**Теоретические сведения**

Будем рассматривать задачу:

 (безусловная минимизация),

предполагая, что функция (*x*) непрерывно дифференцируема на *Rn*, т.е. *ϕ*(*x*)∈*C*1(*Rn*). По определению дифференцируемой функции

,

где .

Если , то при достаточно малых  главная часть приращения для будет определяться дифференциалом функции . Оценим величину . Справедливо неравенство Коши-Буняковского:

,

причем, если *ϕ*′(*x*) ≠ 0, то правое неравенство превращается в равенство, только при *h*=−*αϕ*′(*x*), а левое только при *h*=*αϕ*′(*x*), где *α*= *const*≥ 0.

Отсюда ясно, что при *ϕ*′(*x*) ≠ 0 *направление наибыстрейшего возрастания* функции (*x*) в точке *x* совпадает с *направлением градиента* (*x*), а направление наибыстрейшего убывания – с направлением антиградиента

′(*x*). Это свойство градиента лежит в основе ряда итерационных методов минимизации функций. Один из таких – *градиентный*. Он предполагает, как, впрочем, и все остальные итерационные методы, наличие априорной точки начального приближения.

Предположим, что начальная точка *x*0 уже выбрана, тогда градиентный метод заключается в построении последовательности {*xk*} по правилу:



*αk* – величина шага, *xk* – направление спуска.

Если , то шаг  можно выбрать так, чтобы получить релаксационную последовательность: .

,

при всех достаточно малых *αk>* 0.

Если , то *xk* – стационарная точка. В этом случае процесс прекращается и проводятся дополнительные исследования поведения функции в окрестности точки *xk* для выяснения того, достигается ли в точке *xk* минимум функции (*x*) или не достигается.

Существуют различные *способы выбора величины шага* *a­­k* в методе. В зависимости от способа выбора *a­­k* можно получить различные варианты градиентного метода.

***Градиентный метод с убыванием длины шага***

В ряде методов достаточно потребовать выполнения условий:

На интуитивном уровне объяснение следующее:

* условие сходимости ряда накладывают, чтобы добиться достаточно быстрой сходимости последовательности к нулю с целью обеспечения сходимости метода в окрестности точки экстремума .
* условие расходимости ряда призвано обеспечить достижение точки экстремума *x*\* даже при неудачном выборе начального приближения , т.е. при больших расстояниях от до .

Сходимость *медленная*!

***Метод наискорейшего спуска***

На луче, направленном по антиградиенту, введем функцию одной переменной

и определим ak из условий

Другими словами, ak выбирается так, чтобы в заданном направлении была наименьшей для чего на любом шаге необходимо решать задачу одномерной минимизации функции , например, с помощью .

У данного метода медленная сходимость (геометрическая скорость сходимости, порядок сходимости d =1)

- порядок сходимости метода, где

– геометрическая скорость сходимости, где q<1

– квадратичная скорость сходимости, где q<1

**Экспериментальное исследование методов**

Точкой глобального минимума функции F является точка x\* = (1, 1);

F(x\*) = 0. При помощи языка python и библиотеки matplotlib были построены графики функции при различных значениях a. Графики функции представлены на рис. 1-3.

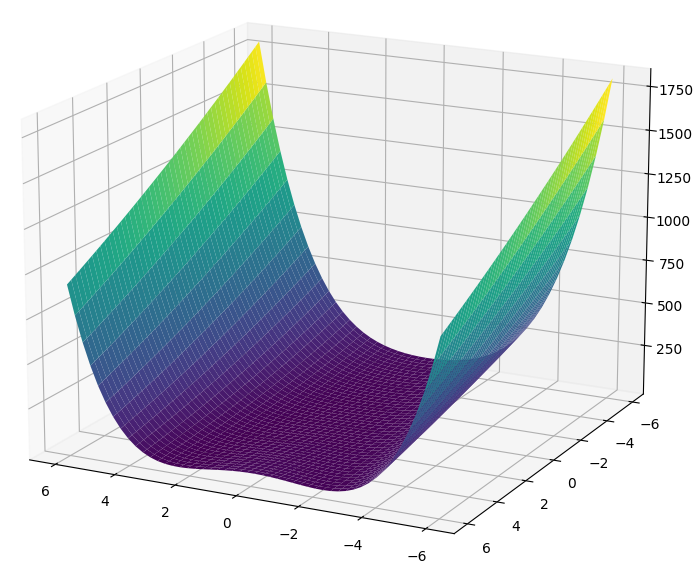


Рисунок 1 – График функции

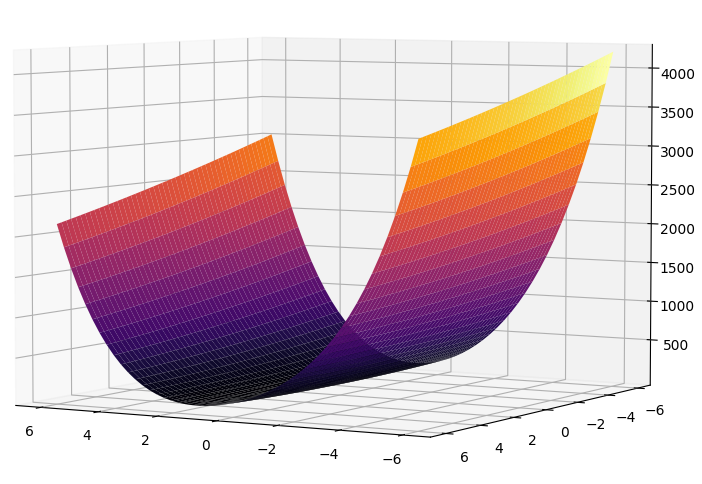


Рисунок 2 – График функции

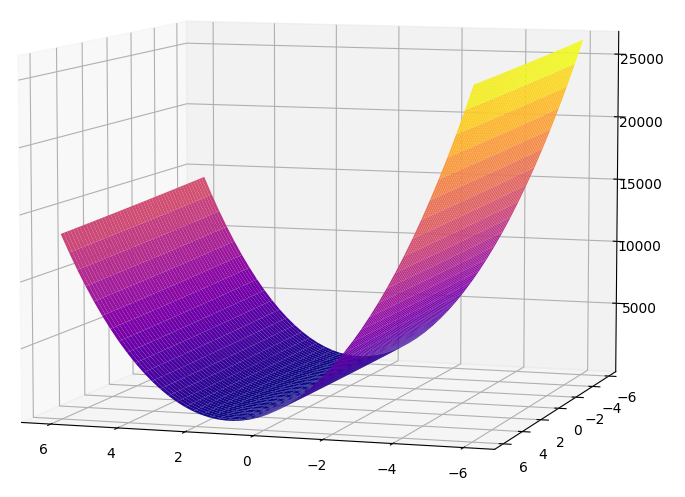


Рисунок 3 – График функции

В качестве различных начальных приближений были выбраны следующие точки. Точки выбраны на основании того, что они находятся на разном расстоянии от точки минимума х\* = (1, 1).

А также были выбраны три параметра > 0.

**Результаты работы программы**

***Метод наискорейшего спуска.***

* Начальное приближение
* при

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага | x1 | x2 | f | Число вычислений f | Оценка порядка сходимости | Оценка скорости сходимости (F(x[k])/F(x[k-1])) с учетом F(x\*)=0 |
| 1 | 1,938552 | 4,000000 | 0,939452 | 12 |  |  |
| 6 | 1,817028 | 3,303706 | 0,667539 | 17 |  |  |
| 11 | 1,640268 | 2,885761 | 0,448078 | 12 |  |  |
| 16 | 1,529878 | 2,342590 | 0,280775 | 17 |  |  |
| 21 | 1,378130 | 2,036566 | 0,161840 | 10 |  |  |
| 26 | 1,290762 | 1,666746 | 0,084543 | 16 |  |  |
| 31 | 1,183853 | 1,479239 | 0,039844 | 13 |  |  |
| 36 | 1,130640 | 1,278685 | 0,017067 | 16 |  |  |
| 41 | 1,074465 | 1,189164 | 0,006748 | 14 |  |  |
| 46 | 1,049992 | 1,102564 | 0,002499 | 17 |  |  |
| 51 | 1,026748 | 1,067250 | 0,000885 | 13 |  |  |
| 56 | 1,017467 | 1,035275 | 0,000305 | 17 |  |  |
| 61 | 1,009107 | 1,022812 | 0,000103 | 13 |  |  |
| 66 | 1,005877 | 1,011794 | 0,000035 | 17 | 1,044289 | 0,802533 |
| 67 | 1,004712 | 1,011793 | 0,000028 | 13 | 1,008528 | 0,802350 |
| 68 | 1,004713 | 1,009450 | 0,000022 | 17 | 1,042253 | 0,801741 |
| 69 | 1,003777 | 1,009450 | 0,000018 | 14 | 1,008123 | 0,801578 |
| 70 | 1,003778 | 1,007574 | 0,000014 | 17 | 1,040173 | 0,801712 |
| 71 | 1,003027 | 1,007573 | 0,000011 | 14 | 1,007779 | 0,801590 |
| 72 | 1,003029 | 1,006069 | 0,000009 | 16 | 1,038323 | 0,801521 |
| 73 | 1,002426 | 1,006068 | 0,000007 | 14 | 1,007456 | 0,801422 |
| 74 | 1,002427 | 1,004861 | 0,000006 | 16 | 1,036704 | 0,801110 |
| 75 | 1,001943 | 1,004860 | 0,000005 | 15 | 1,007162 | 0,801046 |

* при

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага | x1 | x2 | f | Число вычислений f | Оценка порядка сходимости | Оценка скорости сходимости (F(x[k])/F(x[k-1])) с учетом F(x\*)=0 |
| 1 | 1,516175 | 4,000000 | 5,558493 | 11 |  |  |
| 2 | 1,513070 | 2,280088 | 2,632495 | 16 | 0,288733 | 0,473599 |
| 3 | 1,201258 | 2,280650 | 1,106670 | 12 | 0,807567 | 0,420388 |
| 4 | 1,201097 | 1,442227 | 0,404402 | 16 | -2,781377 | 0,365422 |
| 5 | 1,065448 | 1,442254 | 0,137129 | 10 | 1,115087 | 0,339092 |
| 6 | 1,065307 | 1,134582 | 0,042651 | 17 | 2,359952 | 0,311025 |
| 7 | 1,019418 | 1,134603 | 0,012870 | 12 | 1,050148 | 0,301749 |
| 8 | 1,019724 | 1,040475 | 0,003891 | 16 | 1,554054 | 0,302325 |
| 9 | 1,005790 | 1,040429 | 0,001166 | 10 | 1,031453 | 0,299571 |
| 10 | 1,005855 | 1,011874 | 0,000343 | 18 | 1,352254 | 0,294075 |
| 11 | 1,001696 | 1,011865 | 0,000101 | 10 | 1,023000 | 0,293227 |
| 12 | 1,001704 | 1,003427 | 0,000029 | 17 | 1,258034 | 0,288878 |
| 13 | 1,000489 | 1,003426 | 0,000008 | 11 | 1,018088 | 0,288652 |
| 14 | 1,000497 | 1,001012 | 0,000002 | 17 | 1,197928 | 0,295072 |

* при

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага | x1 | x2 | f | Число вычислений f | Оценка порядка сходимости | Оценка скорости сходимости (F(x[k])/F(x[k-1])) с учетом F(x\*)=0 |
| 1 | 1,243552 | 4,000000 | 7,502986 | 11 |  |  |
| 2 | 1,256684 | 1,614111 | 1,648386 | 15 | -0,369428 | 0,219697 |
| 3 | 1,043654 | 1,612938 | 0,321929 | 10 | 1,196256 | 0,195300 |
| 4 | 1,045463 | 1,096938 | 0,051689 | 16 | 4,588201 | 0,160560 |
| 5 | 1,006684 | 1,096802 | 0,008071 | 11 | 1,044055 | 0,156141 |
| 6 | 1,007445 | 1,016677 | 0,001389 | 18 | 1,715970 | 0,172074 |
| 7 | 1,001141 | 1,016617 | 0,000238 | 11 | 1,023013 | 0,171387 |
| 8 | 1,001301 | 1,002973 | 0,000042 | 17 | 1,399416 | 0,178243 |
| 9 | 1,000204 | 1,002960 | 0,000008 | 11 | 1,015639 | 0,178070 |
| 10 | 1,000212 | 1,000439 | 0,000001 | 17 | 1,310300 | 0,148082 |

* Начальное приближение
* при

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага | x1 | x2 | f | Число вычислений f | Оценка порядка сходимости | Оценка скорости сходимости (F(x[k])/F(x[k-1])) с учетом F(x\*)=0 |
| 1 | 0,823271 | 0,456781 | 0,080072 | 7 |  |  |
| 6 | 0,869426 | 0,711192 | 0,019048 | 13 |  |  |
| 11 | 0,943779 | 0,836769 | 0,006071 | 17 |  |  |
| 16 | 0,955365 | 0,898290 | 0,002201 | 13 |  |  |
| 21 | 0,978371 | 0,937743 | 0,000847 | 16 |  |  |
| 26 | 0,982487 | 0,959713 | 0,000338 | 12 |  |  |
| 31 | 0,991199 | 0,974732 | 0,000137 | 16 |  |  |
| 36 | 0,992816 | 0,983417 | 0,000057 | 13 |  |  |
| 41 | 0,996340 | 0,989499 | 0,000024 | 17 |  |  |
| 46 | 0,997005 | 0,993076 | 0,000010 | 13 |  |  |
| 51 | 0,998463 | 0,995594 | 0,000004 | 16 | 1,025519 | 0,841019 |
| 52 | 0,998219 | 0,995882 | 0,000003 | 13 | 1,007319 | 0,841148 |
| 53 | 0,998706 | 0,996293 | 0,000003 | 15 | 1,024672 | 0,841318 |
| 54 | 0,998502 | 0,996535 | 0,000002 | 13 | 1,007098 | 0,841414 |
| 55 | 0,998911 | 0,996880 | 0,000002 | 16 | 1,023851 | 0,841491 |
| 56 | 0,998739 | 0,997084 | 0,000002 | 13 | 1,006894 | 0,841557 |
| 57 | 0,999083 | 0,997374 | 0,000001 | 15 | 1,023112 | 0,841674 |
| 58 | 0,998939 | 0,997545 | 0,000001 | 13 | 1,006669 | 0,841826 |
| 59 | 0,999228 | 0,997789 | 0,000001 | 16 | 1,022415 | 0,841765 |

* при

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага | x1 | x2 | f | Число вычислений f | Оценка порядка сходимости | Оценка скорости сходимости (F(x[k])/F(x[k-1])) с учетом F(x\*)=0 |
| 1 | 0,949128 | 0,433056 | 0,244705 | 8 |  |  |
| 6 | 0,933953 | 0,659266 | 0,088992 | 13 |  |  |
| 11 | 0,980466 | 0,791658 | 0,032599 | 11 |  |  |
| 16 | 0,975381 | 0,874067 | 0,012036 | 12 |  |  |
| 21 | 0,992652 | 0,922762 | 0,004458 | 13 |  |  |
| 26 | 0,990824 | 0,953191 | 0,001657 | 12 |  |  |
| 31 | 0,997246 | 0,971251 | 0,000616 | 12 |  |  |
| 36 | 0,996578 | 0,982560 | 0,000230 | 11 |  |  |
| 41 | 0,998972 | 0,989284 | 0,000086 | 13 |  |  |
| 46 | 0,998723 | 0,993497 | 0,000032 | 11 |  |  |
| 51 | 0,999616 | 0,996004 | 0,000012 | 12 |  |  |
| 52 | 0,999294 | 0,996402 | 0,000010 | 11 | 1,016423 | 0,820980 |
| 53 | 0,999685 | 0,996719 | 0,000008 | 12 | 1,018995 | 0,820964 |
| 54 | 0,999420 | 0,997046 | 0,000007 | 11 | 1,015864 | 0,820973 |
| 55 | 0,999741 | 0,997307 | 0,000005 | 12 | 1,018398 | 0,820950 |
| 56 | 0,999524 | 0,997575 | 0,000004 | 11 | 1,015311 | 0,820972 |
| 57 | 0,999788 | 0,997789 | 0,000004 | 12 | 1,017777 | 0,820962 |
| 58 | 0,999609 | 0,998009 | 0,000003 | 11 | 1,014806 | 0,820977 |
| 59 | 0,999826 | 0,998185 | 0,000002 | 12 | 1,017241 | 0,820957 |
| 60 | 0,999679 | 0,998365 | 0,000002 | 11 | 1,014287 | 0,821007 |
| 61 | 0,999857 | 0,998510 | 0,000002 | 12 | 1,016756 | 0,820973 |
| 62 | 0,999737 | 0,998658 | 0,000001 | 11 | 1,013891 | 0,820967 |
| 63 | 0,999883 | 0,998776 | 0,000001 | 12 | 1,016124 | 0,821005 |

* при

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага | x1 | x2 | f | Число вычислений f | Оценка порядка сходимости | Оценка скорости сходимости (F(x[k])/F(x[k-1])) с учетом F(x\*)=0 |
| 1 | 1,016994 | 0,403731 | 0,404809 | 8 |  |  |
| 2 | 0,955538 | 0,426427 | 0,286227 | 11 |  |  |
| 3 | 1,011726 | 0,577007 | 0,202872 | 15 |  |  |
| 4 | 0,968189 | 0,593253 | 0,143729 | 12 |  |  |
| 5 | 1,008268 | 0,700252 | 0,101788 | 14 |  |  |
| 6 | 0,977341 | 0,711836 | 0,072060 | 11 |  |  |
| 7 | 1,005978 | 0,788601 | 0,050797 | 15 |  |  |
| 8 | 0,983961 | 0,796814 | 0,035797 | 11 |  |  |
| 9 | 1,004273 | 0,851420 | 0,025151 | 16 |  |  |
| 10 | 0,988704 | 0,857211 | 0,017668 | 12 |  |  |
| 11 | 1,003081 | 0,896117 | 0,012349 | 16 |  |  |
| 12 | 0,992089 | 0,900179 | 0,008631 | 10 |  |  |
| 13 | 1,002178 | 0,927554 | 0,006018 | 15 |  |  |
| 14 | 0,994467 | 0,930396 | 0,004196 | 11 |  |  |
| 15 | 1,001464 | 0,949170 | 0,002944 | 15 |  |  |
| 16 | 0,996113 | 0,951164 | 0,002065 | 11 |  |  |
| 17 | 1,001018 | 0,964292 | 0,001451 | 14 |  |  |
| 18 | 0,997266 | 0,965694 | 0,001019 | 11 |  |  |
| 19 | 1,000703 | 0,974852 | 0,000718 | 15 |  |  |
| 20 | 0,998076 | 0,975838 | 0,000505 | 11 |  |  |
| 21 | 1,000515 | 0,982406 | 0,000354 | 15 |  |  |
| 22 | 0,998652 | 0,983098 | 0,000247 | 11 |  |  |
| 23 | 1,000352 | 0,987645 | 0,000174 | 14 |  |  |
| 24 | 0,999055 | 0,988130 | 0,000122 | 11 |  |  |
| 25 | 1,000256 | 0,991375 | 0,000085 | 15 |  |  |
| 26 | 0,999339 | 0,991714 | 0,000059 | 11 |  |  |
| 27 | 1,000174 | 0,993952 | 0,000042 | 16 | 1,066304 | 0,701204 |
| 28 | 0,999537 | 0,994190 | 0,000029 | 11 | 1,007322 | 0,701137 |
| 29 | 1,000126 | 0,995782 | 0,000020 | 15 | 1,062767 | 0,697404 |
| 30 | 0,999677 | 0,995948 | 0,000014 | 11 | 1,006845 | 0,697380 |
| 31 | 1,000086 | 0,997045 | 0,000010 | 15 | 1,057844 | 0,700658 |
| 32 | 0,999774 | 0,997161 | 0,000007 | 11 | 1,006407 | 0,700612 |
| 33 | 1,000062 | 0,997940 | 0,000005 | 15 | 1,055186 | 0,697067 |
| 34 | 0,999842 | 0,998021 | 0,000003 | 11 | 1,006046 | 0,697011 |
| 35 | 1,000042 | 0,998557 | 0,000002 | 15 | 1,051209 | 0,700425 |
| 36 | 0,999890 | 0,998614 | 0,000002 | 11 | 1,005747 | 0,700413 |
| 37 | 1,000030 | 0,998995 | 0,000001 | 16 | 1,049273 | 0,696842 |

* Начальное приближение
* при

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага | x1 | x2 | f | Число вычислений f | Оценка порядка сходимости | Оценка скорости сходимости (F(x[k])/F(x[k-1])) с учетом F(x\*)=0 |
| 1 | -2,359 | 6,298 | 11,820 | 9 |  |  |
| 6 | -2,263 | 5,384 | 10,716 | 15 |  |  |
| 11 | -1,976 | 4,682 | 9,461 | 11 |  |  |
| 16 | -1,814 | 3,533 | 7,976 | 15 |  |  |
| 21 | -1,273 | 2,560 | 6,049 | 12 |  |  |
| 26 | 0,990 | 0,981 | ~ 0,000 | 18 |  |  |
| 31 | 0,996 | 0,989 | ~ 0,000 | 13 | 1,008503 | 0,763026 |
| 32 | 0,996 | 0,992 | ~ 0,000 | 18 | 1,052484 | 0,762856 |
| 33 | 0,997 | 0,992 | ~ 0,000 | 13 | 1,007978 | 0,763051 |
| 34 | 0,997 | 0,994 | ~ 0,000 | 19 | 1,049527 | 0,762830 |
| 35 | 0,997 | 0,994 | ~ 0,000 | 13 | 1,007555 | 0,762968 |
| 36 | 0,998 | 0,995 | ~ 0,000 | 18 | 1,046637 | 0,763655 |
| 37 | 0,998 | 0,995 | ~ 0,000 | 14 | 1,007148 | 0,763757 |
| 38 | 0,998 | 0,996 | ~ 0,000 | 18 | 1,044065 | 0,764448 |
| 39 | 0,998 | 0,996 | ~ 0,000 | 13 | 1,006782 | 0,764510 |
| 40 | 0,999 | 0,997 | ~ 0,000 | 18 | 1,041944 | 0,764561 |
| 41 | 0,999 | 0,997 | ~ 0,000 | 13 | 1,006440 | 0,764634 |

* при

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага | x1 | x2 | f | Число вычислений f | Оценка порядка сходимости | Оценка скорости сходимости (F(x[k])/F(x[k-1])) с учетом F(x\*)=0 |
| 1 | 2,014 | 6,559 | 16,54669 | 10 |  |  |
| 2 | 1,936 | 3,484 | 8,83227 | 19 | 0,563824 | 0,533778 |
| 3 | 1,423 | 3,498 | 3,95785 | 10 | 0,951855 | 0,448113 |
| 4 | 1,383 | 1,817 | 1,47724 | 17 | -0,111052 | 0,373242 |
| 5 | 1,126 | 1,823 | 0,46644 | 10 | 1,779725 | 0,315755 |
| 6 | 1,111 | 1,205 | 0,12391 | 17 | 7,925467 | 0,265647 |
| 7 | 1,030 | 1,207 | 0,03038 | 12 | 1,074181 | 0,245181 |
| 8 | 1,027 | 1,047 | 0,00712 | 17 | 1,862532 | 0,234258 |
| 9 | 1,007 | 1,048 | 0,00163 | 11 | 1,040165 | 0,229171 |
| 10 | 1,006 | 1,011 | 0,00036 | 17 | 1,456421 | 0,223136 |
| 11 | 1,002 | 1,011 | 0,00008 | 9 | 1,027318 | 0,221987 |
| 12 | 1,001 | 1,002 | 0,00002 | 17 | 1,315694 | 0,211126 |
| 13 | 1,000 | 1,002 | 0,00000 | 10 | 1,020970 | 0,210836 |

* при

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага | x1 | x2 | f | Число вычислений f | Оценка порядка сходимости | Оценка скорости сходимости (F(x[k])/F(x[k-1])) с учетом F(x\*)=0 |
| 1 | 1,488 | 6,420 | 23,64185 | 10 |  |  |
| 2 | 1,680 | 3,827 | 12,56225 | 17 | 0,630037 | 0,531356 |
| 3 | 1,218 | 3,793 | 6,52184 | 11 | 0,965162 | 0,519162 |
| 4 | 1,330 | 2,272 | 2,96992 | 16 | 0,265414 | 0,455381 |
| 5 | 1,090 | 2,255 | 1,34065 | 12 | 0,839871 | 0,451409 |
| 6 | 1,143 | 1,534 | 0,56467 | 17 | -2,581020 | 0,421192 |
| 7 | 1,036 | 1,526 | 0,23734 | 10 | 1,079961 | 0,420311 |
| 8 | 1,060 | 1,223 | 0,09914 | 17 | 2,290936 | 0,417704 |
| 9 | 1,015 | 1,219 | 0,04141 | 10 | 1,032880 | 0,417725 |
| 10 | 1,025 | 1,090 | 0,01672 | 19 | 1,566666 | 0,403691 |
| 11 | 1,006 | 1,089 | 0,00675 | 10 | 1,020895 | 0,403617 |
| 12 | 1,010 | 1,037 | 0,00275 | 17 | 1,349657 | 0,408123 |
| 13 | 1,002 | 1,036 | 0,00112 | 10 | 1,015080 | 0,408190 |
| 14 | 1,004 | 1,015 | 0,00045 | 16 | 1,262050 | 0,398605 |
| 15 | 1,001 | 1,014 | 0,00018 | 10 | 1,011972 | 0,398632 |
| 16 | 1,002 | 1,006 | 0,00007 | 18 | 1,200397 | 0,407049 |
| 17 | 1,000 | 1,006 | 0,00003 | 10 | 1,009709 | 0,407027 |
| 18 | 1,001 | 1,002 | 0,00001 | 16 | 1,169635 | 0,397883 |
| 19 | 1,000 | 1,002 | 0,00000 | 10 | 1,008352 | 0,397914 |
| 20 | 1,000 | 1,001 | 0,00000 | 18 | 1,140204 | 0,406834 |

***Градиентный метод с убыванием длины шага***

* Начальное приближение
* при

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага | x1 | x2 | f | Число вычислений f | Оценка порядка сходимости | Оценка скорости сходимости (F(x[k])/F(x[k-1])) с учетом F(x\*)=0 |
| 1 | 1,980 | 4,000 | 0,96674 | 1 |  |  |
| 1001 | 1,941 | 3,978 | 0,92989 | 1 | 0,990954 | 0,961889 |
| 2001 | 1,939 | 3,975 | 0,92828 | 1 | 0,999076 | 0,998261 |
| 3001 | 1,938 | 3,974 | 0,92735 | 1 | 0,999459 | 0,999001 |
| 4001 | 1,938 | 3,972 | 0,92670 | 1 | 0,999617 | 0,999297 |
| 5001 | 1,937 | 3,971 | 0,92619 | 1 | 0,999703 | 0,999457 |
| 6001 | 1,937 | 3,971 | 0,92578 | 1 | 0,999757 | 0,999558 |
| 7001 | 1,937 | 3,970 | 0,92544 | 1 | 0,999795 | 0,999627 |
| 8001 | 1,937 | 3,969 | 0,92514 | 1 | 0,999822 | 0,999678 |
| 9001 | 1,936 | 3,969 | 0,92488 | 1 | 0,999843 | 0,999716 |
| 10001 | 1,936 | 3,968 | 0,92464 | 1 | 0,999860 | 0,999746 |
| 11001 | 1,936 | 3,968 | 0,92443 | 1 | 0,999873 | 0,999771 |
| 12001 | 1,936 | 3,968 | 0,92424 | 1 | 0,999884 | 0,999791 |
| 13001 | 1,936 | 3,967 | 0,92406 | 1 | 0,999893 | 0,999808 |
| 14001 | 1,936 | 3,967 | 0,92390 | 1 | 0,999901 | 0,999822 |
| 15001 | 1,936 | 3,967 | 0,92374 | 1 | 0,999908 | 0,999835 |
| 16001 | 1,935 | 3,966 | 0,92360 | 1 | 0,999914 | 0,999845 |
| 17001 | 1,935 | 3,966 | 0,92347 | 1 | 0,999919 | 0,999855 |
| 18001 | 1,935 | 3,966 | 0,92334 | 1 | 0,999924 | 0,999863 |
| 19001 | 1,935 | 3,966 | 0,92322 | 1 | 0,999928 | 0,999871 |
| 20000 | 1,935 | 3,965 | 0,92311 | 1 | 0,999932 | 0,999877 |

* при

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага | x1 | x2 | f | Число вычислений f | Оценка порядка сходимости | Оценка скорости сходимости (F(x[k])/F(x[k-1])) с учетом F(x\*)=0 |
| 1 | 1,800 | 4,000 | 6,97760 | 1 |  |  |
| 1001 | 1,529 | 3,833 | 5,03467 | 1 | 0,934322 | 0,721548 |
| 2001 | 1,520 | 3,812 | 4,95987 | 1 | 0,992724 | 0,985142 |
| 3001 | 1,515 | 3,800 | 4,91719 | 1 | 0,995704 | 0,991396 |
| 4001 | 1,512 | 3,792 | 4,88731 | 1 | 0,996935 | 0,993924 |
| 5001 | 1,509 | 3,785 | 4,86434 | 1 | 0,997614 | 0,995299 |
| 6001 | 1,507 | 3,779 | 4,84569 | 1 | 0,998044 | 0,996166 |
| 7001 | 1,506 | 3,775 | 4,83000 | 1 | 0,998342 | 0,996763 |
| 8001 | 1,504 | 3,771 | 4,81647 | 1 | 0,998561 | 0,997198 |
| 9001 | 1,503 | 3,767 | 4,80458 | 1 | 0,998728 | 0,997530 |
| 10001 | 1,502 | 3,764 | 4,79397 | 1 | 0,998861 | 0,997792 |
| 11001 | 1,501 | 3,761 | 4,78440 | 1 | 0,998967 | 0,998004 |
| 12001 | 1,500 | 3,758 | 4,77568 | 1 | 0,999057 | 0,998178 |
| 13001 | 1,499 | 3,756 | 4,76768 | 1 | 0,999131 | 0,998325 |
| 14001 | 1,499 | 3,754 | 4,76029 | 1 | 0,999195 | 0,998449 |
| 15001 | 1,498 | 3,752 | 4,75341 | 1 | 0,999249 | 0,998557 |
| 16001 | 1,498 | 3,750 | 4,74700 | 1 | 0,999297 | 0,998650 |
| 17001 | 1,497 | 3,748 | 4,74098 | 1 | 0,999339 | 0,998732 |
| 18001 | 1,496 | 3,746 | 4,73531 | 1 | 0,999376 | 0,998805 |
| 19001 | 1,496 | 3,745 | 4,72996 | 1 | 0,999410 | 0,998869 |
| 20000 | 1,495 | 3,743 | 4,72489 | 1 | 0,999440 | 0,998929 |

* при

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага | x1 | x2 | f | Число вычислений f | Оценка порядка сходимости | Оценка скорости сходимости (F(x[k])/F(x[k-1])) с учетом F(x\*)=0 |
| 1 | 1,500 | 4,000 | 9,31250 | 1 |  |  |
| 1001 | 1,232 | 3,721 | 6,19874 | 1 | 0,903109 | 0,665636 |
| 2001 | 1,228 | 3,690 | 6,06209 | 1 | 0,988754 | 0,977955 |
| 3001 | 1,225 | 3,673 | 5,98360 | 1 | 0,993340 | 0,987053 |
| 4001 | 1,223 | 3,660 | 5,92853 | 1 | 0,995240 | 0,990797 |
| 5001 | 1,222 | 3,651 | 5,88617 | 1 | 0,996289 | 0,992854 |
| 6001 | 1,221 | 3,643 | 5,85177 | 1 | 0,996956 | 0,994157 |
| 7001 | 1,220 | 3,636 | 5,82285 | 1 | 0,997417 | 0,995057 |
| 8001 | 1,219 | 3,630 | 5,79791 | 1 | 0,997757 | 0,995716 |
| 9001 | 1,219 | 3,625 | 5,77599 | 1 | 0,998016 | 0,996220 |
| 10001 | 1,218 | 3,621 | 5,75646 | 1 | 0,998222 | 0,996618 |
| 11001 | 1,218 | 3,617 | 5,73884 | 1 | 0,998389 | 0,996940 |
| 12001 | 1,217 | 3,613 | 5,72280 | 1 | 0,998526 | 0,997206 |
| 13001 | 1,217 | 3,610 | 5,70809 | 1 | 0,998642 | 0,997429 |
| 14001 | 1,217 | 3,607 | 5,69450 | 1 | 0,998741 | 0,997619 |
| 15001 | 1,216 | 3,604 | 5,68187 | 1 | 0,998826 | 0,997783 |
| 16001 | 1,216 | 3,601 | 5,67009 | 1 | 0,998901 | 0,997926 |
| 17001 | 1,216 | 3,598 | 5,65904 | 1 | 0,998966 | 0,998051 |
| 18001 | 1,215 | 3,596 | 5,64864 | 1 | 0,999024 | 0,998163 |
| 19001 | 1,215 | 3,594 | 5,63882 | 1 | 0,999076 | 0,998262 |
| 20000 | 1,215 | 3,591 | 5,62953 | 1 | 0,999124 | 0,998352 |

Дальнейшие расчеты для других начальных приближений избыточны, так как исходя из данных таблиц из-за большого количества итераций, невозможно достижение заданной точности при использовании исходных данных.

**Оценка скорости и порядка сходимости методов**

Исходя из полученных данных для каждого начального приближения и каждого значения *a* в методе наискорейшего спуска оценка порядка сходимости всегда находится вблизи единицы, что соотносится с теоретическими данными (порядок сходимости метода d = 1). *Линейная сходимость.*

Также можно сказать, что для каждого запуска последовательность сходится к *линейно* (со скоростью геометрической прогрессии), так как выполняется соотношение:

*, где q=0.84*

Результаты исследования метода убывания длины шага также показали, что оценка порядка сходимости находится вблизи единицы, что соотносится с теоретическими данными. *Линейная сходимость.*

Также можно сказать, что для каждого запуска последовательность сходится к *линейно* (со скоростью геометрической прогрессии), так как выполняется соотношение:

*, где q=0.99*

**Исследование эффективности метода наискорейшего спуска и его сравнение с методом с убыванием длины шага**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Начальное приближение*** | ***Метод наискорейшего спуска*** | | | | | | ***Метод с убыванием длины шага*** | |
|  | |  | |  | |  | |
| ***Шагов*** | ***Вычислений F*** | ***Шагов*** | ***Вычислений F*** | ***Шагов*** | ***Вычислений F*** | ***Шагов*** | ***Вычислений F*** |
|  | 75 | 1095 | 14 | 193 | 10 | 137 | 20000 | 20000 |
|  | 59 | 861 | 63 | 734 | 37 | 478 | 20000 | 20000 |
|  | 41 | 591 | 13 | 176 | 20 | 274 | 20000 | 20000 |

**Выводы**

***Эффективность метода с убыванием длины шага и его сравнение с методом наискорейшего спуска***

Исходя из полученных данных можно сделать следующие выводы.

При использовании метода с убыванием длины шага требуется значительное число шагов и, следовательно, вычислений F по сравнению с методом наискорейшего спуска. Данный метод чувствителен к выбору первоначальных данных, так как неудачный выбор намного увеличивает количество итераций. Метод наискорейшего спуска также чувствителен к входным данным.

В целом использование метода наискорейшего спуска намного эффективнее метода с убыванием длины шага.

Также было установлено, что при увеличении параметра *a* в методах уменьшалось количество производимых шагов и, следовательно, вычислений F.